



确定型经济订货批量模型研究

○刘义山 李骥昭

(平顶山工业职业技术学院 河南 平顶山 467001)

【摘要】 本文研究物资最优存储策略及存储控制问题,利用存储量、订货量和订货时间及存储控制理论分析了三个模型,得到建立模型的目标函数的准则,可根据不同的供货速率和不同要求的存储量(允许缺货和不允许缺货)建立不同的存储模型,以求得最优存储策略。

【关键词】 存储 供货 缺货 经济批量模型

任何工商企业,如果物资存储过多、过时或过少都不利于企业发展。物资从输入进入存储再到输出的整个系统为存储控制系统,在存储系统中,将物资保持在预期的一定水平,使生产过程或流通过程不间断并有效进行,对输入过程中的订货时间和订货数量进行控制,称为存储控制策略,例如循环策略等。而最优存储策略主要是利用数学工具寻求合理的存储量、订货量和订货时间。

一、预备知识

本文假定在单位时间内的需求量为已知常数,货物供应速率、订货费、存储费和缺货费已知,其订货策略是将单位时间分成 n 等分的时间区间 t , 在每个区间开始订购或生产相同的货物量,形成 t 循环存储策略。记 D 表示需求速率, P 表示生产速率或再补给速率, A 表示生产准备费用, C 表示单位货物获得成本, H 表示单位时间内单位货物持有成本, B 表示单位时间内单位货物的缺货费用, π 表示单位货物的缺货费用,与时间无关, t 表示订货区间, L 表示提前期,从提出订货到所订货物且进入存储系统之间的时间间隔, Q 表示订货批量或生产批量, S 表示最大缺货量, R 表示再订货点, n 表示单位时间内的订货次数。

二、模型 I: 瞬时供货, 不允许缺货的经济批量模型

此模型的特征是: 供货速率为无穷大, 不允许缺货, 提前期固定, 每次订货手续费不变, 单位时间内的存储费不变。需求速率 D 为均匀连续的, 每次订货量不变, 以周期 t 循环订货。先考虑提前期为零(即当存量降至零时, 可以立即得到订货量 Q) 的情形。

最优存储策略是: 求使总费用最少的订货批量 Q^* 及订货周期 t^* 。

将单位时间看作一个计划期, 设在计划期内分 n 次订货, 订货周期为 t , 在每个周期内的订货量相同。由于周期长度一样, 故计划期内的总费用等于一个周期内的总费用乘以 n 。

在 $[0, t]$ 周期内, 存储量不断变化, 当存量降至零时, 应立即补充整个 t 内的需求量 Dt , 因此订货量为 $Q=Dt$, 最大存量为 Q , 然后以速率 D 下降, 在 $[0, t]$ 内存量是 t 的函数 $y=Q-Dt$ 。

$[0, t]$ 内的存储费是以平均存量来计算的, $[0, t]$ 内的总存量(即累计存量)为 $\int_0^t (Q-Dx)dx = Qt - \frac{1}{2}Dt^2 = \frac{1}{2}Qt$ 。

在 $[0, t]$ 内的平均存量为 $\bar{y} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2}Qt = \frac{1}{2}Q$, 也是单位时间内的平均存量。 H 是单位货物在计划期内的存储费, 故在单位时间内的总存储费为 $QH/2$ 。

在一个周期内的订货固定手续费为 A , 计划期内分 n 次订货, 由 $n=1/t$ 知总订货费用为 $(A+KQ)n = \frac{A}{t} + \frac{CQ}{t}$; 计划期内的总费用最小的存储模型为 $\min f = \frac{1}{2}HQ + \frac{1}{t}A + \frac{1}{t}CQ$, $Q=Dt, Q \geq 0, t \geq 0$

由 $t=Q/D$ 代入上式消去变量 t , 得到无条件极值 $\min f(Q) = \frac{1}{2}HQ + \frac{1}{Q}AD + CQ$ 。

利用微分知识, $f(Q)$ 在 Q^* 点有极值的必要条件是 $df/dQ = 0$, 因此有 $\frac{df}{dQ} = \frac{1}{2}H - \frac{1}{Q^2}AD = 0$ 。

解出 Q , 得 $Q = \pm \sqrt{\frac{2AD}{H}}$, 舍去小于零的解, 由上式得 $\frac{d^2 f}{dQ^2} = \frac{2AD}{Q^3}$, 当 $Q^* = \sqrt{2AD/H}$ 时, $d^2 f/dQ^2 = H^{2/3}/\sqrt{2AD} > 0$, 故 Q^* 是所求的最优解。

另一求解方法, 去掉式 $f(Q)$ 中常数项 CD , $D(Q)$ 是 $HQ/2$ 中的增函数, 是 AD/Q 的减函数。这两个函数的交点就是最小点, 令 $HQ/2 = AD/Q$, 解出 Q 即可, 则有 $Q^* = \sqrt{2AD/H}$, $t^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{2AD/H}$, 最小费用为 $f^* = \sqrt{2HAD} + CD = HQ^* + CD$, 由 $n=1/t$ 可得最优订货次数 $n^* = \frac{1}{t^*} = \sqrt{HD/2A}$ 。

此模型是求总费用最小的订货批量, 通常称为经典经济订货批量。

三、模型 II: 瞬时供货, 允许缺货的经济批量模型

此模型的特征是: 当存量降至零时, 不一定非要立即补充, 允许一段时间缺货, 但到货后应将缺货数量马上全部补齐, 即缺货预约, 其他特征同模型 I。暂时缺货现象在实际中是存在的, 允许缺货的存储策略有得有失。一方面, 因缺货而耽误需求会造成缺货损失; 另一方面, 由于允许缺货就可减少存储量和

订货次数,因而节省存储费和订货费。因此企业除支付缺货费外没有其他损失时,在每个周期内有缺货现象对企业有利。除了模型 I 中的参数外,还假设 S 是在周期 t 内的最大缺货量; Q_1 是在周期 t 内的最大量; t_1 是存储量为非负的时间周期; t_2 是缺货周期(存储量为负数的时间周期)。由于采取缺货预约存储策略,所以在一个周期内的订货量仍为 $Q=Dt$,在 t_1 内有存量,需求量为 $Q_1=Dt_1$,在 t_2 内缺货量 $S=Dt_2$,不难看出, $Q=Q_1+S=D(t_1+t_2)=Dt$ 与模型 I 的推导类似,在一个周期内的平均存量为 $Q_1 t_1 / 2t$,平均缺货量为 $\frac{S t^2}{2t} = \frac{S(t-t_1)}{2t}$,相应的各项费用为:存储费 $\frac{1}{2} H Q_1 t_1$,缺货费 $\frac{1}{2} B S(t-t_1) = \frac{1}{2} B(Q-Q_1)(t-t_1)$,订货费: $A+CQ$ 。则在计划期内总费用最小的存储模型为:

$$\min f = \frac{1}{2t} H Q_1 t_1 + \frac{1}{2t} B (Q-Q_1)(t-t_1) + \frac{A}{t} + \frac{CQ}{t}, Q=Dt, Q_1=Dt_1, Q, Q_1, t, t_1 \geq 0$$

消去目标函数中的变量 Q 和 t_1 上式变为:

$$\min f(Q_1, t) = \frac{1}{2Dt} H Q_1^2 + \frac{1}{2Dt} B (Dt-Q_1)^2 + \frac{A}{t} + CD$$

求上式的二元函数极值:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1} = \frac{2H Q_1}{2Dt} - \frac{2B(Dt-Q_1)}{2Dt} = \frac{(H+B)Q_1}{Dt} - B = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{H Q_1^2}{2Dt^2} + \frac{B}{2D} \frac{2(Dt-Q_1)Dt - (Dt-Q_1)^2}{t^2} - \frac{A}{t^2} = \frac{BD}{2} -$$

$$\frac{(H+B)Q_1^2}{2Dt^2} - \frac{A}{2t^2} = 0 \quad (2)$$

由式(1)得 $Q_1 = \frac{BDt}{H+B}$, 将 Q_1 代入式(2)得 $\frac{BD}{2} - \frac{B^2 D}{2(H+B)} - \frac{A}{t^2} = 0$ 。得到最优解 $Q_1^* = \sqrt{\frac{2AD}{H}} \sqrt{\frac{B}{H+B}}, t^* = \sqrt{\frac{2A}{HD}}$

$$\sqrt{\frac{H+B}{B}}, Q^* = Dt^* = \sqrt{\frac{2AD}{H}} \sqrt{\frac{H+B}{B}}, \text{总费用为: } f^* =$$

$$\sqrt{2HAD} \sqrt{\frac{B}{H+B}} + CD, \text{由 } Q_1 = Dt, Q = Q_1 + S \text{ 可得 } t_1^* = \frac{Q_1^*}{D} =$$

$$\sqrt{\frac{2A}{HD}} \sqrt{\frac{B}{H+B}}, S^* = Q^* - Q_1^* = \sqrt{\frac{2AD}{B}} \sqrt{\frac{H}{H+B}}$$

与模型 I 比较,模型 II 有下列特点:

第一,订货周期延长,订货次数减少。因为 $\frac{H+B}{B} > 1$ 故有: t^*

$$= \sqrt{\frac{2A}{HD}} \sqrt{\frac{H+B}{B}} > \sqrt{\frac{2A}{HD}}$$

第二,订货量增加,因为 $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{B}} \sqrt{\frac{H+B}{B}} > \sqrt{\frac{2AD}{H}}$

第三,总费用减少,由 $\frac{B}{H+B} < 1$ 故有 $f^* = \sqrt{2HAD}$

$$\sqrt{\frac{B}{H+B}} < \sqrt{2HAD}$$

第四,将模型 I 中不允许缺货看作 $B \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{B}{H+B}$

$\rightarrow 1$, 则模型 II 的最优解与模型 I 的解一致,即 $f^* \rightarrow \sqrt{2HAD} + CD, Q_1^* \rightarrow 0$

四、模型 III: 边供应边需求,不允许缺货的经济批量模型

这种模型的特征是:物资的供应不是成批的,而是以速率 P ($P > D$) 均匀连续的供应,存储量逐渐补充,不允许缺货。在生产过程中的在制品流动就属于这种订货类型,这类模型也称为生产批量模型。设 t 为生产周期, t_1 为一个供货周期 t 内的生产时间,产量为 Dt , t_1 是生产需求量 Dt 所花费的时间周期。显然 $t_1 < t$, 当存量为零时开始生产,存量以速率 $P-D$ 增加,当产量达到 Dt 时停止生产,然后存量以速率 D 减少,直到存量为零时又开始生产。在 t 内的最高存储量为 $(P-D)t_1$, 平均存储量为 $(P-D)t_1/2$, 订货量 $Q=Dt=Pt_1$ 。存储费为 $H(P-D)t_1/2$, 订货量 $Q=Dt=Pt_1$ 。手续费为 A , 购置费为 CQ 。则在 t 内的总费用为 $H(P-D)t_1/2 + A + CQ$ 。从而在计划期内的平均总费用最小的存储

模型为: $\min f = \frac{1}{2} H(P-D)t_1 + A + CQ, Q=Dt, Q=Pt_1, Q, t, t_1 \geq 0$

消去变量 t_1 , 得到无条件极值:

$$\min f(Q) = \frac{1}{2} H Q (1 - \frac{P}{D}) + \frac{1}{Q} AD + CD$$

$$\text{令 } df/dQ=0, \text{得 } \frac{df}{dQ} = \frac{1}{2} H (1 - \frac{P}{D}) - \frac{AD}{Q^2} = 0$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{H}} \sqrt{\frac{P}{P-D}}$$

$$\text{解出 } Q \text{ 得 } t^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2A}{HD}} \sqrt{\frac{P}{P-D}}, \text{总费用为: } f^* =$$

$$\sqrt{2HAD} \sqrt{\frac{P-D}{P}} + CD$$

$$\text{由 } Q=Pt_1 \text{ 得到 } t_1^* = \frac{Q^*}{P} = \sqrt{\frac{2AD}{HP(P-D)}}$$

将模型 I 中的瞬时供货理解为生产速率很大, 则当 $P \rightarrow +\infty$ 时, $t_1 \rightarrow 0, D/P \rightarrow 0, \frac{P}{P-D}$ 和 $\frac{P-D}{P}$ 趋于 1, 模型三的最优解就与模型 I 的最优解相同。

五、结束语

这三个模型的特征为: 模型的目标函数都是以总费用(总订货费 + 总存储费 + 总缺货费)最小这一准则建立的。根据不同的供货速率和不同要求的存储量(允许缺货和不允许缺货)建立不同的存储模型, 求出最优存储策略(即最优解)。因为模型中的期和量都是确定值, 这种需求量是确定的模型称为确定型模型, 对于模型中的期或量是随机变量的情形, 有待于进一步的讨论研究。

【参考文献】

- [1] 钱颂迪: 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.
- [2] 张维迎: 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1996.
- [3] 邓成梁: 运筹学的原理和方法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996.
- [4] 施锡铨: 博弈论[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2002.

(责任编辑: 胡婉君)

确定型经济订货批量模型研究

作者: [刘义山](#), [李骥昭](#)
作者单位: [平顶山工业职业技术学院, 河南, 平顶山, 467001](#)
刊名: [当代经济](#)
英文刊名: [CONTEMPORARY ECONOMICS](#)
年, 卷(期): 2009 (17)

参考文献(4条)

1. [施锡铨](#) [博弈论](#) 2002
2. [邓成梁](#) [运筹学的原理和方法](#) 1996
3. [张维迎](#) [博弈论与信息经济学](#) 1966
4. [钱颂迪](#) [运筹学](#) 1993

本文读者也读过(10条)

1. [胡雄鹰](#). [张宗祥](#). [万文君](#). [梅彝](#). [HU Xiong-ying](#). [ZHANG Zong-xiang](#). [WAN Wen-jun](#). [MEI Ben](#) [EOQ扩展模型的模拟研究](#)[期刊论文]-[商品储运与养护](#)2008, 30 (11)
2. [牛旺林](#) [浅议经济订货批量在企业物资采购中的应用](#)[期刊论文]-[中国经贸](#)2011 (12)
3. [李群霞](#). [张群](#). [韩晓磊](#). [LI Qun-xia](#). [ZHANG Qun](#). [HAN Xiao-lei](#) [基于模糊集的可部分补货库存模型的研究](#)[期刊论文]-[物流技术](#)2010, 29 (10)
4. [杜廷松](#) [订货问题的一个最优存储模型](#)[期刊论文]-[商场现代化](#)2007 (11)
5. [刘臣宇](#). [张素琴](#). [郭凤琴](#). [LIU Chen-yu](#). [ZHANG Su-qin](#). [GUO Feng-qin](#) [基于批量订购存储模型的航材储备](#)[期刊论文]-[科技信息](#)2009 (7)
6. [张家善](#). [李玲](#) [基于价格折扣下的EOQ模型\(II\)研究](#)[期刊论文]-[辽宁工程技术大学学报\(社会科学版\)](#)2004, 6 (2)
7. [王宪杰](#). [卢俊香](#). [WANG Xian-jie](#). [LU Jun-xiang](#) [随机局部弹性与分批连续进货的随机存储模型](#)[期刊论文]-[工程数学学报](#)2008, 25 (1)
8. [陈光亮](#) [确定性存储模型的实证分析——基于EOQ的视角](#)[期刊论文]-[现代商贸工业](#)2007, 19 (10)
9. [王宪杰](#). [张国法](#) [整批间隔进货的存储量控制模型与随机局部弹性](#)[期刊论文]-[运筹学学报](#)2004, 8 (2)
10. [付向红](#). [FU Xiang-hong](#) [交货时间为随机变量的存储模型](#)[期刊论文]-[重庆文理学院学报\(自然科学版\)](#) 2009, 28 (2)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_ddjj200917070.aspx