

文章编号 :1002-1566(2006)02-0166-04

经济订货批量公式的一个注解

傅珏生 解 燕

(苏州大学数学科学学院,苏州,215006)

摘要 本文讨论了不允许缺货和允许缺货存贮模型中经济订货批量公式,并建立了修正后的存贮模型,给出了相应的经济订货批量公式。

关键词 存贮模型 经济订货批量

中图分类号 O22

文献标识码 A

A Note on Economic Order Quantity Formula

FU Jue-sheng, XIE Yan

(Suzhou University, Suzhou, 215006)

Abstract In this paper, the Economic Order Quantity formulae of the storage models are discussed. The revised storage models and their economic order quantity formulae are proposed.

Key words storage model; economic order quantity formula.

存储管理是企业生产经营管理的一个重要环节,是降低成本提高企业经济效益的有效途径和方法。存贮模型是许多运筹学和数学模型方面的教材经常介绍的一个优化模型,并由此导出了著名的经济订货批量公式(EOQ 公式),这一公式在实际工作中,尤其目前在超市、物流等领域得到了广泛地应用。存贮模型主要分为不允许缺货和允许缺货两大类,在建模过程中尤其是在推导经济订货批量公式时,将模型中的一些变量视为连续变量,我们将这样建立的模型称为连续模型。但在一些实际问题中,这些变量一般是离散的,如在建模中不把这一点考虑在内,就会导致结论的偏差,造成模型的误用。

1 不允许缺货的存贮模型

我们先考虑这样的问题 配件厂为装配线生产若干种部件,轮换生产不同的部件是因更换设备要支付生产准备费(与生产数量无关),同一部件的产量大于需求时因积压资金、占用仓库要付贮存费。现已知某一部件的日需求量是 100 件,生产准备费 5000 元,贮存费是每日每件 1 元。如果生产能力远大于需求,并且不允许出现缺货,试安排该产品的生产计划,即多少天生产一次(称为生产周期),每次产量多少,可使每天平均费用最小。

这是不允许缺货的存贮问题,设生产周期为 T 天,每次产量为 Q 件,生产准备金为 c_1 元,贮存费每日每件为 c_2 天,每天需求量为 r 件,如将变量 T 和 Q 视为连续变量,可以导出不允许缺货的存贮问题的连续模型,具体过程如下:

记时间 t 时的贮存量为 $q(t)$, 则 $q(0) = Q, q(T) = 0$ 且 $q(t)$ 以速率 r 递减, 在一周期 $[0, T]$ 的表达式为:

$$q(t) = Q - rt \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

一个周期内的贮存费为 $c_2 \int_0^T q(t) dt = \frac{QT}{2}$, 注意到准备费用为 c_1 和

$$Q = rT, \quad (2)$$

一个周期的总费用为

$$\bar{C} = c_1 + c_2 \frac{QT}{2} = c_1 + c_2 r \frac{T^2}{2} \quad (3)$$

于是每天的平均费用为

$$C_c(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} \quad (4)$$

容易得出 当

$$T = T_{cM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \quad (5)$$

即

$$Q = Q_{cM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} \quad (6)$$

时, 最小每天平均费用为

$$C_{cM} = \sqrt{2c_1 c_2 r} \quad (7)$$

(5) 和 (6) 式就是经济订货批量公式。

我们这里可以通过具体数据试算一下:

若每天生产一次, 每次 100 件, 无贮存费, 生产准备费 5000 元, 每天的费用为 5000 元。

若 10 天生产一次, 每次 1000 件, 贮存费为 $900 + 800 + \cdots + 100 = 4500$ 元, 生产准备费 5000 元, 总计 9500 元, 平均每天费用为 950 元。

若 50 天生产一次, 每次 5000 件, 贮存费为 $4900 + 4800 + \cdots + 100 = 122500$ 元, 生产准备费 5000 元, 总计 127500 元, 平均每天费用为 2550 元。

而用上面建立的不允许缺货的存贮问题的连续模型计算的结果为 $T_{cM} = 10$ 天, $C_{cM} = 1000$ 元。而且当 $T = 1$ 和 $T = 50$ 时, 平均每天费用分别为 5500 元和 2600 元, 与我们试算的结果均相差 50 元。问题出在什么地方呢? 就出在贮存费的计算上, 因为贮存费是按日计算的, 我们在建模过程中将时间变量视为连续变量, 将一个周期内的贮存费近似表达为 $c_2 \int_0^T q(t) dt =$

$\frac{QT}{2}$ 。其实我们可以计算出一个周期内的贮存费的真值为:

$$c_2 r + 2c_2 r + \cdots (T-1)c_2 r = c_2 r \frac{T(T-1)}{2} \quad (8)$$

于是一个周期的总费用为

$$\bar{C}_d = c_1 + c_2 r \frac{T(T-1)}{2} \quad (9)$$

每天的平均费用为

$$C_d(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} - \frac{c_2 r}{2} \quad (10)$$

万方数据

我们称这个修正过的模型为不允许缺货的存贮问题的离散模型。这个模型的每天的平均费用(10) 与(4) 相比,相差了 $\frac{c_2r}{2}$ 。由于相差的这一项与 T 无关,故 $C_c(T)$ 与 $C_d(T)$ 的最小值点是一致的,即经济订货批量公式仍成立:当 $T = T_{cM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$, 即 $Q = Q_{dM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$ 时,但最小总费用为

$$C_{dM} = \sqrt{2c_1c_2r} - \frac{c_2r}{2} \tag{11}$$

从上述两个模型的建模过程可以看出,将离散问题连续化,有时会产生一定的偏差。但幸运的是在不允许缺货的问题中,连续模型导出的生产计划(即由经济订货批量公式得出的最小值点 T_{cM} 、 Q_{cM}) 与离散模型导出的结果是一致的,所不同的是最小费用。若不一致,则连续模型导出的生产计划不是实际上的最优生产计划,从而导致了模型的误用。这种情形在下面讨论的允许缺货的存贮问题时就出现了,应该引起大家的注意。

2 允许缺货的存贮问题

对于允许缺货的存贮问题,设每天每件产品缺货损失费为 c_3 元,但缺货数量需在下次生产(或订货) 是补足。周期仍记作 T , Q 是每周期初的贮存量,当 $t = T_1$ 时 $q(t) = 0$,于是有

$$Q = rT_1。$$

在 T_1 到 T 这段缺货时段内需求率 r 不变, $q(t)$ 按原料率继续下降。由于规定缺货量需补足,所以在 $t = T$ 时数量为 $R (= rT)$ 的产品立即到大,使下周期初的贮存量恢复到 Q 。其连续模型为

$$C_c(T, Q) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT - Q)^2}{2rT}。 \tag{12}$$

这里 $C_c(T, Q)$ 表示每天的平均费用。利用微分法可得,当 $T = T_{cM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1(c_2 + c_3)}{c_2c_3r}}$, 即 $Q = Q_{cM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1 + c_3}{c_2(c_2 + c_3)}}$ 时,每天的平均费用达到最小,且最小总费用为

$$C_{cM} = \sqrt{\frac{2c_1c_2c_3r}{c_2 + c_3}}。 \tag{13}$$

同样我们可以建立离散模型,这时一个周期总的费用包括准备费 c_1 , 贮存费

$$c_2r + 2c_2r + \cdots (T - 1)c_2r = c_2r \frac{T_1(T_1 - 1)}{2}。 \tag{14}$$

和缺货损失费

$$c_3r + 2c_3r + \cdots (T - T_1)c_3r = c_3r \frac{(T - T_1)(T - T_1 + 1)}{2}。 \tag{15}$$

一个周期的总费用为

$$\bar{C}_d = c_1 + \frac{c_2Q^2}{2r} + \frac{c_3(rT - Q)^2}{2r} - \frac{c_2Q}{2} + \frac{c_3(rT - Q)}{2} \tag{16}$$

每天的平均费用为

万方数据

$$C_d(T, Q) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT - Q)^2}{2rT} - \frac{c_2Q}{2T} + \frac{c_3(rT - Q)}{2T}。 \tag{17}$$

与(12) 比较,相差项 $\frac{c_2Q}{2T} - \frac{c_3(rT - Q)}{2T}$ 是 Q 和 T 的函数,不是常数。用微分发可以求出最小值点为：

$$T_{dM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1(c_2 + c_3)}{c_2c_3r} - \frac{(c_2 + c_3)^2}{4c_2c_3}}, \tag{16}$$

$$Q_{dM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1c_3r}{c_2(c_2 + c_3)} - \frac{c_3r^2}{4c_2}} + \frac{r}{2}. \tag{17}$$

最小总费用为

$$C_{dM} \equiv \sqrt{\frac{2c_1c_2c_3r}{c_2 + c_3} - \frac{c_2c_3r^2}{4}}. \tag{18}$$

显然与连续模型的结果无论是最小值点还是最小费用都不一致了,下表是两个模型的最小值点和最小费用结果比较。

		T	Q	Cmin
不允许缺货情形	连续模型	$\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$	$\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$	$\sqrt{2c_1c_2r}$
	离散模型	$\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$	$\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$	$\sqrt{2c_1c_2r} - \frac{c_2r}{2}$
允许缺货情形	连续模型	$\sqrt{\frac{2c_1(c_2 + c_3)}{c_2c_3r}}$	$\sqrt{\frac{2c_1c_3r}{c_2(c_2 + c_3)}}$	$\sqrt{\frac{2c_1c_2c_3r}{c_2 + c_3}}$
	离散模型	$\sqrt{\frac{2c_1(c_2 + c_3)}{c_2c_3r}} - \sqrt{\frac{(c_2 + c_3)^2}{4c_2c_3}}$	$\sqrt{\frac{2c_1c_3r}{c_2(c_2 + c_3)} - \frac{c_3r^2}{4c_2}} + \frac{r}{2}$	$\sqrt{\frac{2c_1c_2c_3r}{c_2 + c_3} - \frac{c_2c_3r^2}{4}}$

3 结束语

由于存贮问题的管理模型并不复杂,原理也容易掌握,该模型的应用可以改善企业的经营管理,以达到节约资金,获得更多利润的目的。但在有些应用场合中,这些变量往往是离散的,用连续方法建立模型和求解模型会导致错误的产生,更糟的是应用者并不知情。在变量是离散时,即使应用我们修正后的离散模型(10)(17),模型给出的最小值点可能不是离散的,从而理论上的最小费用有时是不能达到的。使用中可直接对离散模型(10)(17)搜索出实际的最小值点及最小费用。不可对上述两个模型得出的经济订货批量公式计算得到的结果简单的取整,这样得到的不一定是真正的最优计划。

[参考文献]

[1] 姜启源,谢金星,叶俊.《数学模型》[M]. 北京:高等教育出版社,2003,8.
[2] 钱颂迪.运筹学[M]. 北京:清华大学出版社,1990,1.

经济订货批量公式的一个注解

作者: 傅珏生, 解燕, FU Jue-sheng, XIE Yan
作者单位: 苏州大学数学科学学院, 苏州, 215006
刊名: 数理统计与管理 ISTIC PKU CSSCI
英文刊名: APPLICATION OF STATISTICS AND MANAGEMENT
年, 卷(期): 2006, 25(2)
被引用次数: 2次

参考文献(2条)

1. 钱颂迪 运筹学 1990
2. 姜启源;谢金星;叶俊 数学模型 2003

本文读者也读过(10条)

1. 刘慧, 宋广华 经济订货批量模型及其扩展[期刊论文]-商场现代化2008(34)
2. 舒丽蕊, 陈盛新, SHU li-xin, CHEN Sheng-xin 国家医药储备存储决策模型的遴选[期刊论文]-药学实践杂志2011, 29(1)
3. 胡雄鹰, 张宗祥, 万文君, 梅霖, HU Xiong-ying, ZHANG Zong-xiang, WAN Wen-jun, MEI Ben EOQ扩展模型的模拟研究[期刊论文]-商品储运与养护2008, 30(11)
4. 徐德英, 柏庆国, XU De-ying, BAI Qing-guo 两种可替代物品的经济订货批量模型[期刊论文]-数学的实践与认识2009, 39(20)
5. 李安周 批量优惠条件下的经济订货批量模型[期刊论文]-统计与决策2005(23)
6. 王骏 经典经济订货批量模型的灵敏度分析[期刊论文]-商场现代化2007(34)
7. 苏华, 王斌 美国的公共卫生应急机制[期刊论文]-全球科技经济瞭望2003(8)
8. 经济订货批量(EQO)[期刊论文]-网络财富2009(2)
9. 武瞳, 储文功, 刘照元, Wu Tong, Chu Wengong, Liu Zhaoyuan 美国国家药品应急体系构建与运作研究[期刊论文]-中国药事2009, 23(12)
10. 苟烨, 陶新良, 齐继东, 马小平, 邱鹁, XUN Ye, TAO Xin-liang, QI Ji-dong, MA Xiao-ping, QIU Yao 军队战备物资储备预测模型研究[期刊论文]-物流技术2009, 28(7)

引证文献(3条)

1. 牛旺林 浅议经济订货批量在企业物资采购中的应用[期刊论文]-中国经贸 2011(12)
2. 靖鲲鹏, 宋之杰 特殊数量折扣价格奖励计划的最优订货策略[期刊论文]-商场现代化 2009(5)
3. 谭勇, 陈建华 空调生产企业通用物料采购订货优化策略实证研究[期刊论文]-产业与科技论坛 2008(5)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_sltyjgl200602008.aspx